Leçon 220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Développements :

Théorème de Hadamard Lévy, Théorème de Liapunov.

Bibliographie :

Berthelin, Bernis, Gourdon, Demailly.

Rapport du jury :

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de Grönwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées. Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que le sujet y invite clairement. Pour aller plus loin, il est possible d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon en présentant le point de vue du schéma d'Euler. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

1 Etude générale des équations différentielles

1.1 Premières définitions et problème de Cauchy

Remarque 1 (Berthelin p12)**.** *Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times K^N$ et $f : U \to K^N$ continue. On considère l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, $(t, y) \in U$.*

Remarque 2 (Berth p21)**.** *[Voir Gourdon p254] On peut aussi définir un système d'équas diff d'ordre supérieur mais on peut se ramener à un système d'ordre 1 par des matrices.*

Définition 3 (Berth p12)**.** *Solution de (E).*

Définition 4 (Berth p12)**.** *Problème de Cauchy.*

Définition 5 (Berth p12)**.** *Linéaire ou non.*

Exemple 6. *Equation du type RLC.*

Proposition 7 (Berth p13)**.** *Régularité des solutions. Si f est C^k alors toute solution est C^{k+1}.*

Proposition 8 (Berth p13)**.** *Formulation intégrale du problème de Cauchy.*

1.2 Existence et unicité des solutions

Définition 9 (Berth p15)**.** *Prolongement.*

Définition 10 (Berth p16)**.** *[Demailly p128] Solution maximale.*

Proposition 11 (Demailly p128)**.** *Toute solution se prolonge en une solution maximale.*

Exemple 12 (Demailly p130)**.** $y' = y^2$.

Définition 13 (Berth p82)**.** *Fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.*

Proposition 14 (Berth p83)**.** *C^1 implique localement lipschitzien.*

Théorème 15 (Berth p83)**.** *Théorème de Cauchy-Lischitz.*

Exemple 16 (Berth p95)**.** *[Berth p120] $y' = t^2 e^y$, $y'' + (y')^2 \sin(ty) = 0$: existence et unicité des solutions maximales.*

$y' = y^2/t$, $y(1) = 1$, $y' = y^2$, $y(0) = -1/2$: existence et unicité des solutions maximales, donner la solution et son intervalle de définition.

$x' = |y - t|, y' = |x - t|$.

Remarque : Demailly p143 Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

Application 17. *Si $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ alors les solutions sont bornées.*

Exemple 18. *Les solutions de $x' = x(1 - x)$ sont bornées par 0 et 1.*

Proposition 19. *Parler de solutions périodiques.*

Remarque[Berth p83] Sans l'hypothèse localement lipschitzien par rapport à la variable d'état, on n'est plus assuré de l'unicité mais on garde tout de même l'existence de solutions.

Théorème 20 (Berth p83)**.** *Théorème de Cauchy-Peano-Arzela local.*

Exemple 21 (Berth p120,525)**.** *[Demailly p138] $y' = \sqrt{y}$: les solutions maximales sont la fonction nulle et les y_C.*

$y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales : la fonction nulle et t^3.

1.3 Le problème de la globalité

Définition 22 (Berth p16). *Solution globale.*

Proposition 23 (Berth p16). *Globale implique maximale. Réciproque fausse en général.*

Contre exemple 24 (Berth p16). $ft, y) = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$ *:* $y(t) = y_0/(1 - y_0 t)$ *solution maximale non globale.*

Définition 25 (Berth p84). *Globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état.*

Théorème 26 (Berth p90). *Théorème de Cauchy-Lispchitz dans le cas globalement lipschitzien.*

Corollaire 27 (Berth p90). *Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.*

1.4 Durée de vie d'une solution

Proposition 28 (Berth p18,23). *Lemme de Gronwall intégral.*

Application 29 (Berth p23). *Si* $y > 0$ *est solution sur* $\mathbb{R}$ *de* $y' = \phi(y)$ *tel que* $|\phi(x)| \leq C|x|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *alors* $y(t) \leq y(0)exp(tC)$*.*

Application 30 (Rouvière p133). $||y_1(t) - y_2(t)|| \leq ||x_1 - x_2||exp(k|t - t_0|)$.

Remarque 31. *Pour* $x_1 = x_2$*, on retrouve le résultat d'unicité dans Cauchy-Lipschitz global.*

Application 32. *Pour* $y" + qy = 0$*, si* q *est* C^1*, croissante, strictement positive sur* $\mathbb{R}_+$*, alors les solutions sont bornées sur* R_+*.*

Théorème 33 (Berth p107). *Théorème de sortie de tout compact.*

Corollaire 34 (Berth p109). *Théorème des bouts.*

Application 35 (Bernis). *Théorème de Hadamard Lévy.*

Exemple 36. $(x, y) \mapsto (y - \arctan(x), x - \arctan(y)/2)$ *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposition 37 (Berth p109). *Si* f *est bornée, les solutions sont globales.*

Exemple 38 (Berth p110). *[Berth p578,231]* $y' = sin(y)$*.*
$x' = y + x(1 - x^2 - y^2), y' = -x + y(1 - x^2 - y^2)$*. Si* $x_0^2 + y_0^2 \in]0, 1[$ *alors les solutions sont globales.*

2 Expression explicite des solutions

2.1 Cas des équations différentielles linéaires

Proposition 39 (Berth p34). *L'ensemble des solutions homogènes est de dimension* N*.*

Corollaire 40 (Berth p35). *L'ensemble des solutions est un espace affine de direction l'ensemble des solutions homogènes.*

Proposition 41 (Berth p36). *Solution globale de* $y' = a(t)y + b(t)$*.*

Proposition 42 (Berth p54). *Formule de Duhamel dans le cas* A *constant.*

Exemple 43.

Proposition 44 (Bernis). *Etude asymptotique de l'équation de Bessel.*

2.2 Se ramener à une équation linéaire

Proposition 45 (Berth p129). *Méthodes pour variables séparables.*

Exemple 46 (Berth p129). $t \ln(t)y' - y - 1 = 0$*, pour* $t > 0$*.*

Proposition 47 (Berth p136). *Méthode pour équation de Bernoulli.*

Exemple 48.

Proposition 49 (Berth p137). *Méthode pour équation de Ricatti.*

3 Etude de la stabilité

3.1 Points d'équilibre d'un système autonome

Définition 50 (ZQ p381). *Système autonome.*

Définition 51 (ZQ p382). *Point d'équilibre.*

Définition 52 (Berth p234). *[ZQ p382] Stabilité. Stabilité asymptotique. (Dessin)[Demailly p282]*

Exemple 53 (Berth p236). $y' = y$*,*$y' = -y$*.*

3.2 Cas linéaire

Théorème 54 (Berth p239). *[Demailly p285] Cas homogène à coefficients constants,* 0 *est point d'équilibre et discuter la stabilité.*

Remarque 55 (Berthelin p205). *[Demailly p291] Faire les dessins des noeuds en dimension* 2*. (Allure des trajectoires).*

Exemple 56. $x" + x = 0$.
$x' = 4x - y, y' = x + 2y$.

3.3 Cas général

Définition 57 (Rouvière p138). *Système linéarisé.*

Proposition 58 (Berth p247). *[Rouvière p141] Stabilité par linéarisation.*

Exemple 59 (Berth p260). *Exemple d'un système* 2×2*.*

Contre exemple 60 (Demailly p289). *On ne peut pas décider de la nature du point critique si la matrice jacobienne a une valeur propre de partie réelle nulle.*
$x' = \alpha x^3, y' = \beta y^3$.

Exemple 61 (FGN p189). 0 *est asymptotiquement stable pour l'équation de Van der Pool.*

Exemple 62 (Berth p260,583). *Stabilité asymptotique du pendule sans frottement.*

4 Etude qualitative des solutions

4.1 Utilisation du wronskien

Définition 63 (Berth p40). *Wronskien.*

Proposition 64 (Berth p40). *Les solutions sont indépendantes si et seulement si le wronskien est non nul en un point.*

Exemple 65 (Berth p78). *Si* q *est intégrable alors les solutions maximales de* $y'' + q(t)y = 0$ *sont définies sur* $\mathbb{R}_+$ *et il existe des solutions non bornées.*

Théorème 66 (Berth p279). *Théorème d'entrelacement de Strum.*

4.2 Modèle proie-prédateur de l'équation de Lotka-Voltera

Remarque 67 (Berth p200). *[FGN p250] Le système différentiel, les points critiques, l'intégrale première, la solution est globale, dessins des trajectoires, elles sont périodiques.*

4.3 Pendule simple

Remarque 68 (Berth p259,400). *[FGN p285] L'équation, l'intégrale première, le portrait de phase.*